

工学院情報通信系大学院入試想定問題

数学(9:30～11:00):

下記の2分野からそれぞれ1問ずつ出題する.

1. 微分積分
2. 線形代数

論述(11:30～12:30):

論述問題を1問出題する.

次ページ以降に記述されている各分野の想定問題と同程度のレベルの試験問題を、各分野1問ずつ出題する予定である。「論述」の答案用紙は、罫線付き B4 用紙1枚を予定している。

【微分積分】 1

[A-1]

n を自然数, x, θ を実変数として, 以下の設問に答えよ.

(1) 以下の定積分を求めよ.

(a) $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$

(b) $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

(2) x の n 次の多項式 $P_n(x)$ を

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x,$$

$$P_n(x) = 2xP_{n-1}(x) - P_{n-2}(x), \quad n > 1$$

と定義する.

(a) $P_2(x), P_3(x)$ を求めよ.

(b) $x = \cos \theta$ とおくと, $x \in [-1, 1]$ において $P_2(x) = \cos 2\theta, P_3(x) = \cos 3\theta$ と表せることを示せ.

(c) 以下の定積分を $n = 1, 2, 3$ についてそれぞれ求めよ.

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_3(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

(3) 前問で定義した $P_n(x)$ と実数 a_0, a_1, a_2, a_3 を用いて新たな多項式 $R(x)$ を

$$R(x) = a_0 + a_1P_1(x) + a_2P_2(x) + a_3P_3(x)$$

と定義する.

(a) 以下の定積分を求めよ.

$$\int_{-1}^1 [R(x)]^2 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

(b) $x \in [-1, 1]$ において有界な任意の実連続関数 $f(x)$ が与えられたとき

$$\int_{-1}^1 [f(x) - R(x)]^2 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

の値を最小とする a_3 を求める式を $f(x)$ と $P_3(x)$ を用いて表せ.

【微分積分】 2

1. xy 平面上において、原点を中心とする半径 a の円の内部（円周上の点は含まない）を領域 D とし、

$$I = \iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy \quad (1.1)$$

とする。以下の問に答えよ。

- 1) $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ と変数変換したとき、領域 D の範囲を r, θ で表せ。

- 2) 上記の変換に対するヤコビ行列 J

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$$

および、その行列式を求めよ。

- 3) 式 (1.1) を計算し、 a を用いて表せ。

- 4) $\lim_{a \rightarrow \infty} I$ の値を求めよ。

- 5) 4) の結果を利用して、

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

の値を求めよ。

- 6) ガンマ関数

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

について、 $\Gamma(\frac{1}{2})$ の値を求めよ。

【線形代数】 1

1. 集合 V の任意の要素 u, v および任意の実数 α について, u と v の和 $u+v$, および u の α 倍 αu が定義されているとする. V が実線形空間であるための条件の中に

条件 I $\alpha u \in V$,

条件 II $u+v \in V$

がある. 条件 I と II は以下の集合 V_1 から V_{10} が実線形空間であるための必要十分条件になっている. なお集合 V_1 から V_8 では, 集合の要素 u と v の和は u と v の成分毎の和と定義し, 実数 α による要素 u の α 倍は u の各々の成分を α 倍したものとす. 集合 V_9 と V_{10} では, 和と α 倍をそれぞれ多項式同士の和と実数 α による多項式の α 倍によって定義する.

以下の集合 V_1 から V_{10} のそれぞれについて, その集合が実線形空間であるか否か述べよ. 実線形空間である場合にはその基底を一つ挙げよ. そうではない場合には反例を挙げよ.

例えば, 条件 I と II の両方を満たす実線形空間 $\{(a, b) \mid a, b \text{ は実数}\}$ については基底として $\{(1, 0), (0, 1)\}$ を挙げ, 条件 I を満たさない集合 $\{(a, b) \mid a, b \text{ は非負の実数}\}$ については $\alpha = -1$ と $u = (1, 1)$ が条件 I を満たさないことを述べればよい.

- 1) $V_1 = \{(a, b, c) \mid a, b, c \text{ は実数}\}$.
- 2) $V_2 = \{(a, b, c) \mid a, b, c \text{ は実数であり, かつ } a^2 + b^2 + c^2 \leq 1\}$.
- 3) $V_3 = \{(a, b, c) \mid a, b, c \text{ は実数であり, かつ } a + b = b + c = 0\}$.
- 4) $V_4 = \{(a, b, c) \mid a, b, c \text{ は実数であり, かつ } a + b = b + c = 1\}$.
- 5) $V_5 = \{M \mid M \text{ は } 2 \times 2 \text{ 実行列}\}$.
- 6) $V_6 = \{M \mid M \text{ は } 2 \times 2 \text{ 実行列であり, かつ } M \text{ のトレースは } 0\}$.
- 7) $V_7 = \{M \mid M \text{ は } 2 \times 2 \text{ 実行列であり, かつ } M \text{ の行列式は } 0\}$.
- 8)

$$V_8 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mid a, b, c \text{ は実数であり, かつ } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\}.$$

- 9) $V_9 = \{f(x) \mid f(x) \text{ は次数が } 2 \text{ 以下の実多項式であり, かつ } f(1) = 0\}$.
- 10) $V_{10} = \{f(x) \mid f(x) \text{ は次数が } 2 \text{ 以下の実多項式であり, かつ } f(1) = 1\}$.

【線形代数】 2

1. 3×3 実行列 A を

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

によって定義する。以下の問に答えよ。

- 1) 行列 A の行列式を求めよ。
- 2) I を 3×3 単位行列、 x を変数としたとき、行列 $xI - A$ の行列式を求めよ。
- 3) 行列 A の固有値を全て求めよ。
- 4) 行列 A の各々の固有値について、その固有値に対する固有空間の基底を求めよ。
- 5) ユニタリ行列の定義を述べ、その定義を行列 A が満たしていることを示せ。
- 6) エルミート行列の定義を述べ、その定義を行列 A が満たしていることを示せ。
- 7) $A = BDB^*$ を満たす行列 B と対角行列 D を求めよ。ただし B^* は B の共役転置である。

【論述】 1

現在はまだだが 10 年後には社会に広く行き渡っていると思われる，情報通信技術を用いた製品・サービスを一つ挙げよ（想像上のものでも良い）．それを実現するために必要不可欠な情報通信技術上の課題および既存技術の現状についてなるべく詳細に述べよ．また，この課題が解決された暁にはどのような波及効果が想像されるかについて論ぜよ．図表を用いても構わない．全文日本語または全文英語で論ずること．

【論述】 2

過去に提案された重要な（または自身が好きな）情報通信技術の一つ挙げよ。その技術の重要性や詳細について述べ、それがどのように今日の社会に影響を与えているかについて論ぜよ。図表を用いても構わない。全文日本語または全文英語で論ずること。